Técnicas de Demonstração

Raquel de Souza Francisco Bravo

e-mail: raquel@ic.uff.br

17 de novembro de 2016

O que é uma demonstração?

- É a maneira pela qual uma proposição é validada através de argumentos formais.

Técnicas de Demonstração

- Na ciência da computação uma demonstração pode ser utilizada para se ter certeza de que um determinado algoritmo funciona de acordo com sua especificação.

Como exemplo de algoritmos que foram validados utilizando-se argumentos formais, podemos citar:

- Algoritmos de ordenação
- Algoritmos de busca em bases de dados
- Algoritmos para árvore geradora mínima
- Algoritmos de compressão de dados

Teorema

- O objeto básico de uma demonstração é a proposição que desejamos demonstrar. Essa proposição recebe o nome de teorema.

Teorema

- O objeto básico de uma demonstração é a proposição que desejamos demonstrar. Essa proposição recebe o nome de teorema.
- Um teorema é dividido em duas partes:
  - 1.Hipótese:
  - 2.Tese:

Teorema

- O objeto básico de uma demonstração é a proposição que desejamos demonstrar. Essa proposição recebe o nome de teorema.
- Um teorema é dividido em duas partes:
  - 1.Hipótese: Onde podem-se encontrar as informações conhecidas sobre o teorema.
    - Essas informações são tomadas como verdadeiras a fim de se tentar obter uma demonstração.
  - 2.Tese:

Teorema

- O objeto básico de uma demonstração é a proposição que desejamos demonstrar. Essa proposição recebe o nome de teorema.
- Um teorema é dividido em duas partes:
  - 1.Hipótese: Onde podem-se encontrar as informações conhecidas sobre o teorema.
    - Essas informações são tomadas como verdadeiras a fim de se tentar obter uma demonstração.
  - 2.Tese: É a parte do teorema que desejamos validar. A partir da hipótese, utilizando-se uma sequência de argumentos formais, buscamos uma demonstração para a tese.

Teorema

- Dessa forma o teorema pode ser escrito como a seguinte implicação lógica:

$$\text{Hipótese} \Rightarrow \text{Tese}$$

Lema e Corolário

- Em algumas circunstâncias os teoremas recebem nomes especiais.

Quando um teorema é utilizado como parte da demonstração de um outro teorema, em geral mais complexo, ele recebe o nome de **lema**.

Quando um teorema é uma consequência imediata de outro, ele recebe o nome de **corolário**.

Exemplo

- Teorema 1: A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.

- Corolário 1: Cada ângulo de um triângulo equilátero vale 60 graus.

Técnicas de Demonstração

- A **demonstração direta** de uma implicação $p \Rightarrow q$ é uma sequência de passos lógicos (implicações):

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow p_n = q,$$

Que resultam, por transitividade, na implicação desejada.

Cada passo da demonstração é um axioma ou teorema provado previamente.

Exemplo: Provar que $\Sigma_{i=1}^{k} (2i-1) = k^2$

- Dica: Utilizar as propriedades de somatório

Demonstração por Contrapositiva

- A **contrapositiva** de $p \Rightarrow q$

Demonstração por Contrapositiva

- A **contrapositiva** de $p \Rightarrow q$ é $\sim q \Rightarrow \sim p$
- A contrapositiva é equivalente à implicação original.

A veracidade de $\sim q \Rightarrow \sim p$ implica na veracidade de $p \Rightarrow q$, e vice-versa.

- A técnica é útil quando é mais fácil demonstrar a contrapositiva do que a implicação original.
- Para demonstrarmos a contrapositiva de uma implicação, podemos utilizar qualquer técnica de demonstração.

Exemplo: Prove que se $2|3m$ então $2|m$

Demonstração por contradição

- A Demonstração por **contradição** envolve supor absurdamente que a afirmação a ser demonstrada é falsa e obter, através de implicações válidas, uma conclusão contraditória.

- A contradição obtida implica que a hipótese absurdo é falsa e, portanto, a afirmação é de fato verdadeira.

- No caso de uma implicação $p \Rightarrow q$, equivalente a $\sim p \vee q$, a negação é $p \wedge \sim q$

Exemplo 1: Seja A um conjunto, prove que $\varnothing \subseteq A$, qualquer que seja A

- Por contradição e utilizando a definição de subconjunto

Exemplo 2: Prove que o maior inteiro que divide ambos n e n+1 é 1

Exemplo 3: Prove que $2+5+8+...+(3n-1) = \frac{1}{2}n(3n+1)$

Demonstração por Casos

- Na demonstração por casos, particionamos o universo de possibilidades em um conjunto finito de casos e demonstramos a veracidade da implicação para cada caso.

- Para demonstrar cada caso individual, qualquer técnica de demonstração pode ser utilizada.

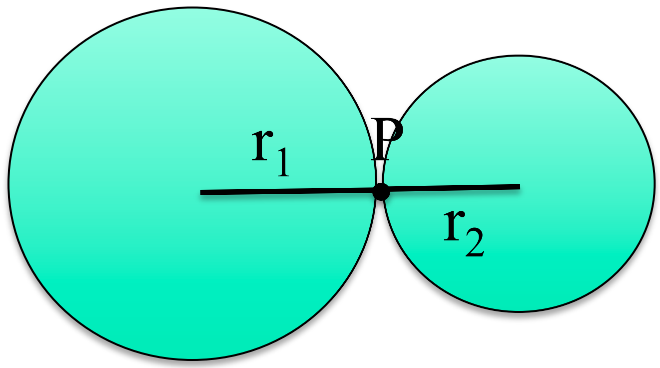
Exemplo 4: Mostre que a soma de dois inteiros x e y de mesma paridade é sempre par.

Exercícios

- 1- Prove que o conjunto dos números primos é infinito
- 2- Prove que $\sqrt{2}$ é um número irracional.
- 3- Sejam dois círculos tangentes C_1 e C_2 com respectivos raios r_1 e r_2 , tais que r_1 é um número racional e r_2 irracional.

  Inicialmente os círculos estão parados com os pontos P_1 do círculo C_1 e P_2 do círculo C_2 coincidentes. Logo após o instante inicial, os círculos C_1 e C_2 começam um movimento uniforme de rotação sem deslizamento. Prove que, uma vez o movimento iniciado, os pontos P_1 e P_2 nunca mais serão coincidentes novamente.

Exercícios



Exercícios

- 4- Prove que se n é um inteiro, então $n^2 \geq n$.
- 5- Se n é um número inteiro ímpar, então n^2 é ímpar.
- 6- Prove que o produto de dois números inteiros pares é par.
- 7- Dê uma demonstração direta ao teorema "Se um inteiro é divisível por 6, então duas vezes esse inteiro é divisível por 4".
- 8- Prove pela contrapositiva que "Se 3n + 2 é ímpar, no qual n é um número inteiro, então n é ímpar".
- 9- Mostre que se n = ab, com a e b inteiros positivos, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.

Exercícios

- 10- Se um número somado a ele mesmo é ele mesmo, então esse número é 0.
- 11- $\forall n \in N_+^*$, se $n \leq 5$ então $n^2 \leq 5n+10$.
- 12- Se n é um número inteiro par, então n^2 é par.
- 13- Algum dia será possível criar um programa de computador que sempre ganhe no xadrez?